EC1311: Problemas Propuestos para el Tema No. 5: Electrostática.

1.- Se tiene un sistema de conductores y cargas ocupando el volumen $-a \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, en el cual las paredes x=-a, x=a, y=0 y y=b son conductores perfectos conectados a 0 V, la superficie x=0 es una fuente con una densidad superficial de carga $\eta(z)=\eta_0 \cos(3\pi z/c)$, y el interior del volumen está lleno de un conductor homogéneo de conductividad σ_0.

a) Sabiendo que $E_x(-x,y,z)=-E_x(x,y,z)$ en el interior del sistema, escriba las condiciones de borde para el potencial electrostático en la región $0<x<a$, $0<y<b$, $0<z<c$.

b) Obtenga el potencial electrostático en $0<x<a$, $0<y<b$, $0<z<c$.

2.- Se tiene un bloque de material conductor homogéneo de conductividad σ_0, ocupando el volumen $0<x<a$, $o<y<b$, $0<z<c$. Dicho bloque está recubierto con láminas de conductor ideal en sus caras y=0, y=b y x=0, las cuales están conectadas a tierra. En la cara z=c se tiene un potencial distribuido $V(x) = Vo\ \text{sen}[3\pi x / 2a]$. Las otras caras están descubuiertas.

a) Escriba las condiciones de borde para el potencial electrostático en el interior del sistema.

b) Calcule el potencial electrostático en el interior del sistema.

3.- Se tiene un sistema en el volumen $-\infty<x<\infty$, $0 \le y \le a$, $-\infty<z<\infty$, constituido por dos bloques de material conductor homogéneo (uno en $0<x<\infty$, $0<y<a$ $-\infty<z<\infty$ y otro en $-\infty<x<0$, $0<y<a$ $-\infty<z<\infty$), un plano conductor perfecto conectado a tierra en y=0, y una lámina de carga cuya densidad es $\eta = \eta_0$ en x=0.

a) Escriba las condiciones de borde para el potencial electrostático en el interior del sistema.

b) Calcule el potencial electrostático en el interior del sistema.

4.- En un sistema infinito en z, se tiene un bloque de material con parámetros ε_0, μ_o, $\sigma_0 \ne 0$ ocupando la región x>0, $0<y\le a$, un conductor perfecto aterrado en x>0, y=0; y una carga superficial distribuída $\eta(y)$ en x=0, $0<y\le a$, con:

$$\eta(y) = \eta_0 \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\frac{y}{a}\right)$$

El resto es vacío (ε_0, μ_0, $\sigma_0 = 0$).

a) Escriba las condiciones de borde para el potencial en el interior del sistema, suponiendo que $E_x\Big|_{\substack{x=0^- \\ 0<y\le a}} = -E_x\Big|_{\substack{x=0^+ \\ 0<y\le a}}$.

b) Calcule el potencial electrostático en el interior del sistema.

c) Calcule la densidad volumétrica de corriente en el interior del sistema.

d) Calcule la densidad superficial de carga en la superficie del conductor perfecto. Suponga que $\overline{E} = \overline{0}$ para y<0.

5.- Se tiene un sistema con la misma geometría del problema 4, en el cual la carga superficial se substituye por una lámina de material conductor ideal conectado a una batería de voltaje

V_0. Calcule el potencial electrostático en la región $0 \le y \le a$, $x \ge 0$, resolviendo la ecuación de Laplace.

6.- Se tiene un sistema rectangular en el que:

-La región $0<x<a$, $0<y<b$, $0 \le z \le c$ está llena de un conductor homogéneo ($\sigma = \sigma_0$).

-Las superficies $x=0$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$ son conductores perfectos conectados a tierra.

-La superficie $y=b$, $o<x<a$, $0 \le z \le c$ es un conductor perfecto conectado a un potencial Vo constante, Vo>0.

a) Bosqueje las líneas de $\overline{E}$ en el interior del sistema en un plano $z=z_o$ ($0<z_o<c$). Depende de z el potencial ϕ en el interior del sistema.

b) Escriba las condiciones de borde para ϕ dentro del sistema.

c) Obtenga ϕ dentro del sistema.

7.- Se tiene una caja de dimensiones (a,b,c), en la cual:

-Las tapas ubicadas en x=0, x=a y z=0 son láminas de conductor perfecto y están conectadas a 0V.

-La tapa ubicada en z=c está conectada a una fuente de voltaje distribuida $V(y) = Vo\cos(3\pi y/b)$.

-El interior de la caja está lleno de un material conductor homogéneo de conductividad σ_0.

-Los lados y=0 y y=b no tienen tapa.

a) Escriba las condiciones de borde que debe satisfacer el potencial electrostático sobre la superficie de la caja.

b) Calcule el potencial electrostático en el interior de la caja mediante la solución a la ecuación de Laplace.

8.- Se tiene un sistema infinito en z, en el cual hay tres láminas conductoras perfectas, (en x=0, x=a y y=b) conectadas a 0 V, 0 V y Vo, y un bloque de material cuya conductividad es constante y vale σ_0 (mhos/m).

a) Escriba las condiciones de borde que aplican al potencial electrostático en el interior del sistema.

b) Obtenga ϕ en el interior del sistema resolviendo la ecuación de Laplace.

9.- Se tiene una caja rectangular de dimensiones a,b y 2c en la que:

-Las paredes x=0, x=a, y=0, y=b están conectadas a tierra.

-En z=0, $0<x<a$, $0<y<b$ existe un potencial distribuido $V(x) = Vo\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$.

-El interior de la caja está lleno de un material conductor cuya conductividad es σ_0.

Encuentre el potencial electrostático en el interior de la caja mediante la solución a la ecuación de Laplace.

Ayudas:
Utilice la simetría del problema. Pruebe la función base Z(z)=A cosh (k_Z z) + B senh (k_Z z)

10.- Se tiene un sistema cilíndrico de longitud infinita, contituído por una superficie conductora perfecta en ρ=R, 0<φ<π conectada a una fuente V_0, una superficie conductora perfecta en φ=0, 0<ρ<R conectada a 0 V y una superficie conductora perfecta en $\varphi=\pi$, 0<ρ<R conectada a 0 V.

a) Realice un bosquejo de las líneas de $\overline{\mathrm{E}}$ en el interior del sistema.

b) Determine $\overline{\mathrm{E}}$ en el interior del sistema.

11.- Se tiene un potencial electrostático dado por:

$$\phi(\rho,\varphi)=\begin{cases}\left[A\rho+B\rho^{-1}\right]\cos\varphi \text{ en } \rho>2\mathrm{R},\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ |z|<\infty\\ -\dfrac{\eta_0}{2\varepsilon_0}\left[\rho-R^2\rho^{-1}\right]\cos\varphi \text{ en } \mathrm{R}<\rho<2\mathrm{R},\ 0\le\varphi\le 2\pi, |z|<\infty\\ C\cos\varphi \text{ en } \rho<\mathrm{R},\ 0\le\varphi\le 2\pi, |z|<\infty\end{cases}$$

Dicho potencial satisface $\nabla^2\phi = 0$ excepto en ρ=R y ρ=2R.

a) Encuentre el valor de las constantes A,B y C para que ϕ tenga significado físico.

b) Encuentre las distribuciones de carga que producen el potencial dado.

12.- Se tiene un sistema cilíndrico, de longitud infinita, constituido por dos conchas cilíndricas concéntricas de grosor cero y de radios R_1 y R_2 (R_2>R_1). La concha interna tiene una carga superficial cuya densidad es $\eta_1(\varphi)=\eta_0\cos 3\varphi$. La concha externa tiene una carga superficial cuya densidad es $\eta_2(\varphi)=-\eta_0\cos 3\varphi$. Encuentre el potencial electrostático y el campo eléctrico en todo punto del espacio mediante la solución a la ecuación $\nabla^2\phi = 0$.

13.- Se tiene un sistema infinito en z, con un conductor perfecto aterrado en a<$\rho\le$b, $\varphi=\pi/2$; un conductor perfecto conectado a una batería Vo en ρ=a, $0\le\varphi<\pi/2$; y un material con parámetros ε_0, μ_0, $\sigma_0\neq 0$ en a<$\rho\le$b, $0\le\varphi<\pi/2$. El resto es vacío.

a) Escriba las condiciones de borde para el potencial en la región a<ρ<b, 0<$\varphi<\pi/2$.

b) Obtenga la expresión para el potencial electrostático en el interior del sistema.

14.- Se tiene un cilindro hueco de altura L, radio total R y grosor d, constituido de la siguiente manera: En 0<φ<π existe un material de conductividad uniforme σ_1, en π<φ<2π existe un material de conductividad $\sigma_2=2\sigma_1$, en φ=0 existe una lámina de conductor perfecto conectada a un potencial Vo, y en $\varphi=\pi$ existe una lámina de conductor perfecto conectada a tierra. Fuera del cilindro existe vacío.

a) Hallar el potencial electrostático en la región R-d$\le\rho\le$R, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le z\le$L.

b) Hallar la densidad volumétrica de corriente en todo punto del espacio.

c) Hallar la corriente total suministrada por la fuente ubicada en φ=0 y la resistencai total del sistema.

15.- Se tiene una superficie metálica esférica de diámetro 2R, en cuyo interior hay dos cargas puntuales q y q' ubicadas en (x,y,z)=(0,-R/2,0) y (0,R/2,0), respectivamente. Si se conoce que el potencial eléctrico producido por esta distribución de carga es cero en (x,y,z)=(0,0,0)

a) ¿Cuál es el valor del potencial en la superficie metálica?

b) Dibuje 5 contornos equipotenciales aproximadamente equiespaciados en el plano x=0.

c) Dibuje aproximadamente en el plano x=0, la función vectorial "intensidad de campo eléctrico" para $0 \leq r < \infty$.

16.- Se tiene un sistema con simetría esférica, constituido por una concha esférica de radio "a", la cual tiene una densidad superficial de carga uniforme η_0, y una concha esférica de radio "b" de material conductor perfecto conectado a tierra. El espacio a<r<b está lleno con un material conductor homogéneo de conductividad σ_0.

a) Escriba las condiciones de borde para el potencial electrostático en todo el espacio.

b) Calcule el potencial electrostático en todo el espacio.

c) Calcule el campo electrostático y la densidad volumétrica de corriente en todo el espacio.

d) Calcule la densidad superficial de carga inducida en el conductor perfecto.

17.- Se tiene un sistema constituido por una concha esférica de radio "a" y de material conductor perfecto, conectada a tierra, y una concha esférica de radio "b" conectada a un potencial distribuido dado por $V(\theta,\varphi) = Vo\,\mathrm{sen}\,2\theta\ \cos\varphi$.

a) Escriba las condiciones de borde para el potencial electrostático en todo el espacio.

b) Calcule el potencial electrostático en todo el espacio.

18.- Se tiene en una región del espacio un campo eléctrico uniforme $\overline{E} = -E_0\overline{1z}$, se introduce una esfera de radio R de material dieléctrico cuya permitividad relativa es 5.

a) ¿Se modifica el campo eléctrico en la vecindad de la esfera dieléctrica introducida? ¿Por qué?

b) En el caso que su respuesta a la parte a) fue afirmativa, calcule el campo eléctrico y la densidad de flujo eléctrico en todo punto del espacio.

19.- Si se introduce un cilindro conductor de radio "a" y longitud infinita en una región donde existe un campo electrostático uniforme, paralelo al eje z y de sentido opuesto. (Considere que el eje longitudinal del cilindro se ubica de manera coaxial con el eje x), ¿Se modificará ó no el campo electrostático uniforme? ¿Por qué?, Si su respuesta es afirmativa, determine una expresión analítica para el campo electrostático resultante.

20.- Se tiene una esfera de radio R, cuya superficie está conectada a una fuente de voltaje $V(\theta,\varphi)=Vo\ f(\theta)\ \mathrm{sen}\varphi$.

a) Indique cual debe ser la función $f(\theta)$ para que el potencial electrostático dentro y fuera de la esfera sea una solución tabulada (de menor orden posible) a la ecuación de Laplace. Explique.

b) Obtenga el potencial electrostático en todo el espacio.

EC1311: Problemas Propuestos para el Tema No. 6: Magnetostática.

1.- Se tiene una concha cilíndrica conductora de radio R y longitud infinita, cuyo eje coincide con el eje z. En su superficie existe una corriente superficial cuya densidad es $\overline{K} = K_0 \mathrm{sen}(\varphi)\overline{1z}$. Encuentre el campo magnético producido por esta distribución de corriente en todo punto del espacio, resolviendo la ecuación de Laplace para el potencial escalar magnético.

2.- Se tiene un cilindro hueco de radio R y longitud infinita, cuyo eje es el eje z. Sobre la superficie del cilindro existe una corriente cuya densidad superficial es $\overline{K} = K_0 \mathrm{sen}3\varphi\overline{1z}$.

a) Escriba las condiciones de borde que aplican al campo magnético $\overline{H}$.

b) Obtenga $\overline{H}$ en todo punto del espacio a partir de la solución a la ecuación $\nabla^2\phi_m = 0$.

3.- En una región del espacio delimitada por r=a $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ existe una densidad superficial de corriente definida por $\overline{K} = K_0\overline{1\varphi}$. Determine a partir del potencial escalar magnético, la función vectorial "intensidad de campo magnético" en todo punto del espacio producida por esta corriente. (Suponga condiciones de espacio libre).

4.- Se tiene una concha cilíndrica conductora de radio R y longitud infinita, sobre la cual fluye una corriente cuya densidad superficial es $\overline{K} = A_0(\overline{1\varphi} + \overline{1z})$, tal como se muestra en la figura.

a) Justifique el hecho de que el campo magnético en todo el espacio, excepto en ρ=R, puede derivarse de un potencial escalar magnético que satisface la ecuación de Laplace

b) Escriba las condiciones de borde para $\overline{H}$ en las regiones 1 (ρ>R) y 2 (ρ<R).

c) Obtenga $\overline{H}$ en $\Re^3 - \{\rho = R\}$ a partir de la solución de la ecuación $\nabla^2\phi_m = 0$ en las regiones 1 y 2.

5.- Se tiene una concha esférica de radio R sobre la cual existe una corriente superficial dada por $\overline{K} = K_0 \,\mathrm{sen}\theta\, \overline{1\varphi}$. Encuentre el campo magnético $\overline{H}$ en todo punto del espacio, utilizando la solución a la ecuación $\nabla^2\phi_m = 0$.

6.- Se tiene un campo magnético uniforme $\overline{H} = H_0\overline{1x}$ en todo el espacio. Luego se introduce un cilindro, de radio R y longitud infinita, de material conductor perfecto. Determine el campo magnético que resulta de la interacción del cilindro conductor con el campo inicial. Determine la densidad de corriente superficial inducida en la superficie del conductor.

7.- Se tiene un sistema magnetostático constituido por dos planos paralelos, uno en z=d con densidad de corriente superficial $\overline{K}_1 = K_1\overline{1y}$ y el otro en z=0 con densidad de corriente superficial $\overline{K}_2 = K_2\overline{1y}$.

a) Obtenga el campo magnético en todo el espacio a partir de la solución trivial a la Ecuación de Laplace. Ayuda: estudie la simetría entre el campo de la región z>d y el campo de la región z<0.

b) Determine la relación entre las constantes K_1 y K_2 para que $\overline{H}$ sea nulo en z<0 y z>d.

8.- Se tiene un campo magnético uniforme $\overline{H} = H_0 \overline{1x}$ en todo el espacio. Luego se introduce un cilindro, de radio R y longitud infinita, de material magnético homogéneo. Determine el campo magnético que resulta de la interacción del material magnético con el campo inicial.

9.- Se tiene un campo magnético uniforme $\overline{H} = H_0 \overline{1z}$ en todo el espacio. Luego se introduce una esfera de radio R de material conductor perfecto. Determine el campo magnético que resulta de la interacción del cilindro conductor con el campo inicial. Determine la densidad de corriente superficial inducida en la superficie del conductor.

10.- Se tiene un campo magnético uniforme $\overline{H} = H_0 \overline{1z}$ en todo el espacio. Luego se introduce una esfera de radio R de material magnético homogéneo. Determine el campo magnético que resulta de la interacción del material magnético con el campo inicial.

11.- Se tiene un cilindro de longitud infinita y radio R, coaxial con el eje z, el cual tiene una densidad de magnetización $\overline{M} = M_0 \overline{1x}$.

a) Determine las densidades de corriente del modelo de corriente amperiana.

b) Determine el campo magnético y la densidad de flujo magnético producidos por el cilindro magnetizado en todo el espacio, utilizando el potencial escalar magnético.

12.- Repita el problema 11, esta vez empleando el modelo de carga magnética.

13.- El magnetismo terrestre puede modelarse como producido por una esfera con una densidad de magnetización uniforme $\overline{M} = M_0 \overline{1z}$. Determine el campo magnético y la densidad de flujo magnético utilizando el modelo de corriente amperiana y el potencial escalar magnético.

14.- Repita el problema 13, esta vez utilizando el modelo de carga magnética.